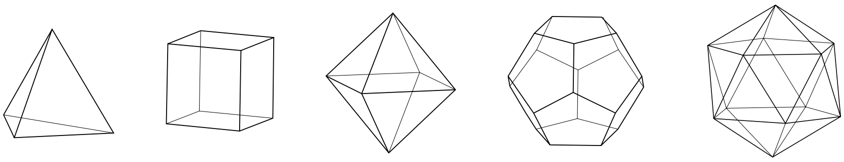
可積分系

「独楽」の数学

数学者はさまざまな自然現象を数式で表現することにチャレンジします。
１８世紀のスイスの数学者オイラーは独楽（コマ）の運動を方程式で示しました。
オイラーは「子供と遊びながらでも論文が書けた」といわれるほどの天才数学者ですが，もしかしたら「コマの方程式」は，本当に子供と遊んでいるときに書いたのかもしれませんね。

対称性と可積分系

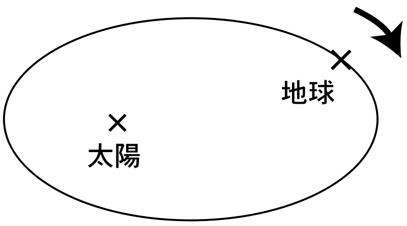
美しい図形は高い対称性を持っています。
それと同じように，自然を表す微分方程式の解を，式で表すことができるのは，方程式に高い対称性がある場合です。
対称性が高い微分方程式の解を，具体的に求めていくのが，可積分系の研究です。



正多面体
古代から知られるこの５つの図形は，もっとも対称性が高い多面体です。

２体問題

太陽と地球の運動である２体問題は，可積分系の最初の例です。



オイラーのコマ

外から力が働かないコマの運動の方程式は，オイラーが発見した可積分系の重要な例です。

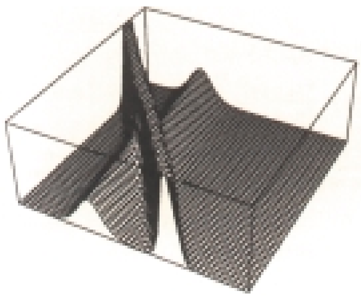
$$\begin{cases} \alpha \dfrac{dx_1}{dt} = (\beta - \gamma) x_2 x_3 \\ \beta \dfrac{dx_2}{dt} = (\gamma - \alpha) x_3 x_1 \\ \gamma \dfrac{dx_3}{dt} = (\alpha - \beta) x_1 x_2 \end{cases}$$

Kdv方程式

Kdv方程式は川などの浅い水面を伝わる波の方程式です。

19世紀にKortewegとde Vriesが考え，今世紀後半の可積分系研究の高まりでも大きな役割を果たしました。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$



Kdv方程式などの解には，ぶつかり合っても波の形が崩れないものがあり，孤立波（ソリトン）と呼ばれています。

戸田格子

戸田盛和による戸田格子は，20世紀に発見された新しい可積分系です。

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n-1}} - e^{-r_{n+1}}$$

ラックス表示

アメリカの数学者ラックスは，行列を用いると，多くの可積分系が下のような一定の形の式，ラックス表示，で書き表されることを発見しました。

$$\frac{d}{dt} L = [B, L]$$

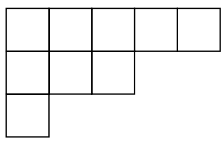
群

対称性の研究には，ガロアが考えた群や，リーの考えた，リー群が役に立ちます。

20世紀には，リー群の基本単位である単純リー群や，有限群の基本単位である有限単純群の分類が完成しました。

ヤング図形

佐藤幹夫は，リー群と関係が深いヤング図形を使って，Kdv方程式や，その一般化であるKP方程式の解を書き表す方法を見つけました。



量子群

対称性は表面には現れずに隠れていることがあります。

神保道夫とドリンフェルトは，量子群という「群もどき」を考え，統計物理学などに現れる可積分系の対称性をあばきだしました。

$$[X^+, X^-] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$